Cirkulacija i fluks vektorskog polja

Neka je $\vec{v}=(v_x, v_y, v_z)$ dato vektorsko polje.
Cirkulacija vektorskog polja $\vec{v}$ duž krive c je integral

$$C=\int_c \vec{v}\, d\vec{r} = \int_c v_x\, dx + v_y\, dy + v_z\, dz \qquad \text{gde je } \vec{r}=(x,y,z)$$
$$d\vec{r}=(dx, dy, dz)$$

Ako je c zatvorena kontura možemo koristiti formulu Stoksa u vektorskom obliku

$$C=\oint_c \vec{v}\, d\vec{r} = \iint_S \vec{n}\cdot \operatorname{rot}\vec{v}\, dS = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} dS$$

Fluks (tok, proticanje) vektorskog polja (kroz površ S) je površinski integral

$$\Phi = \iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\, dS = \iint_S (v_x\cos\alpha + v_y\cos\beta + v_z\cos\gamma)\, dS$$

$$= \iint_S v_x\, dy\, dz + v_y\, dx\, dz + v_z\, dx\, dy$$

Ako je S zatvorena površ, fluks polja se može računati pomoću formule Gauss-Ostrogradski

$$\Phi = \oiint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\, dS = \iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{v}\, dx\, dy\, dz = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$

gde je Ω oblast u prostoru koja je ograničena površinom S.

(#) Izračunati cirkulaciju polja $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + (x+y-1)\vec{k}$ duž odsječka prave između tačaka $A(1,1,1)$ i $B(2,3,4)$.

Rj. Cirkulacija vektorskog polja $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ duž krive c je integral

$$C = \int_c v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz .$$

U našem slučaju $\vec{v} = (x, y, x+y-1)$, dok je c dio prave između tačaka $A(1,1,1)$ i $B(2,3,4)$.

Imamo krivoliniski integral druge vrste

$$C = \int_c x\,dx + y\,dy + (x+y-1)\,dz$$

$A(1,1,1)$
$B(2,3,4)$

Kako glasi jednačina prave kroz dvije tačke u prostoru?

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3} \quad (=t)$$

Napišimo pravu u parametarskom obliku:

$x = t+1$
$y = 2t+1$
$z = 3t+1$

Dio prave između tačke $A(1,1,1)$ i $B(2,3,4)$ je za $t \in [0,1]$.

$dx = dt, \quad dy = 2\,dt, \quad dz = 3\,dt$

$$C = \int_0^1 (t+1)\,dt + (2t+1)\,2\,dt + (3t+1)\,3\,dt = \int_0^1 (t+1+4t+2+9t+3)\,dt$$

$$= \int_0^1 (14t+6)\,dt = 14\cdot\frac{1}{2}t^2\Big|_0^1 + 6t\Big|_0^1 = 7+6 = 13$$

vrijednost cirkulacije polja

(#) Izračunati tok (fluks) vektora $\vec{v} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ kroz sferu $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Rj. $\vec{v}=(V_x, V_y, V_z)=(x^3, y^3, z^3)$

Tok vektorskog polja (kroz površ S) je površinski integral

$$\phi = \iint_S V_x\,dy\,dz + V_y\,dx\,dz + V_z\,dx\,dy$$

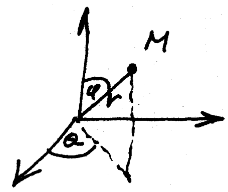
Kako je data zatvorena površina S to možemo upotrebiti formulu Gauss-Ostrogradski

$$\iint_S V_x\,dy\,dz + V_y\,dx\,dz + V_z\,dx\,dy = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

$\frac{\partial V_x}{\partial x} = 3x^2$, $\frac{\partial V_y}{\partial y} = 3y^2$, $\frac{\partial V_z}{\partial z} = 3z^2$, Ω oblast ograničena sferom $x^2+y^2+z^2=R^2$

$$\phi = \iiint_\Omega 3(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz \overset{(\Delta)}{=}$$

uvedimo sferne koordinate



$x=r\sin\varphi\cos\theta$
$y=r\sin\varphi\sin\theta$
$z=r\cos\varphi$
$dx\,dy\,dz=r^2\sin\varphi$

$x^2+y^2+z^2=r^2[\sin^2\varphi\cos^2\theta + \sin^2\varphi\sin^2\theta+\cos^2\varphi]=r^2$

$$\Omega': \begin{cases} 0 \le r \le R \\ 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

$$\overset{(\Delta)}{=} 3\iiint_{\Omega'} r^2 r^2 \sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta =$$

$$=3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi\,d\varphi \int_0^R r^4\,dr = 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi \,\frac{1}{5}r^5\Big|_0^R d\varphi = 3\frac{R^5}{5}\int_0^{2\pi} (-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi} d\theta$$

$$= \frac{6R^5}{5}\pi\,\theta\Big|_0^{2\pi} = \frac{12R^5}{5}\pi$$ traženi tok vektora kroz sferu

(#) Izračunati cirkulaciju vektorskog polja $\vec{v} = -y\vec{i} + x\vec{j} + a\vec{k}$ (a = konstanta) duž kruga $(x-2)^2 + y^2 = 1$, $z=0$.

Rj. $\vec{v} = -y\vec{i} + x\vec{j} + a\vec{k}$

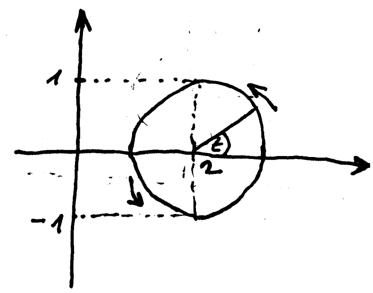
$c: (x-2)^2 + y^2 = 1, \quad z = 0$

$$C = \int_c \vec{v}\, d\vec{r} = \int_c v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz$$

cirkulacija polja $\vec{v}$

Imamo krivolinijski integral

$$C = \int_c -y\,dx + x\,dy + a\,dz \quad \text{gdje je} \quad c: \begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$



Parametrizirajmo kružnicu tj. uvedimo smjene

$$\begin{cases} x - 2 = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 0 \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi \qquad \begin{aligned} dx &= -\sin t\,dt \\ dy &= \cos t\,dt \\ dz &= 0 \end{aligned} \qquad x = 2 + \cos t$$

$$C = \int_0^{2\pi} (-\sin t)(-\sin t)\,dt + (2+\cos t)\cos t\,dt + 0 =$$

$$\int_0^{2\pi} (\sin^2 t + 2\cos t + \cos^2 t)\,dt = \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos t)\,dt = (t + 2\sin t)\Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$

II način: pomoću Stoksove formule

$$C = \int_c \vec{v}\,d\vec{r} = \iint_S \vec{n}\cdot \operatorname{rot}\vec{v}\,dS = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} dS$$

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & a \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 2\vec{k} = (0,0,2)$$

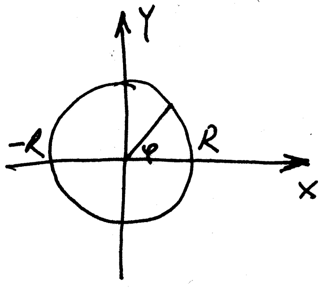
$$C = \iint_S \vec{n}\cdot\operatorname{rot}\vec{v}\,dS = \iint_S 2\cos\gamma\,dS = 2\underbrace{\iint_S dx\,dy}_{\text{površina kruga}} = 2\cdot 1^2\cdot\pi = 2\pi$$

Iz formule Stoksa znamo da je $\cos\gamma\,dS = dx\,dy$

Izračunati cirkulaciju vektorskog polja $\vec{v} = x^2y^3\vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}$ duž kružnice c koja je data kao presjek kružnice $x^2+y^2=R^2$ i xOy ravni.

Rj.

$$c: \begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ z=0 \end{cases}$$



$$C = \int_c \vec{v}\, d\vec{r} = \int_c v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz$$

cirkulacija polja $\vec{v}$

I način

Parametrizirajmo kružnicu $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \\ z=0 \end{cases}$ ... ZAVRŠITI ZA VJEŽBU

II način Pomoću formule Stoksa:

$$C = \int_c \vec{v}\,d\vec{r} = \iint_S \vec{n}\cdot \operatorname{rot}\vec{v}\,dS \qquad \operatorname{rot}\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y^3 & 1 & z \end{vmatrix} = (0,0,-3x^2y^2)$$

$$C = \iint_S (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)\cdot(0,0,-3x^2y^2)\,dS = \iint_S -3x^2y^2\cos\gamma\,dS =$$

$$= -3\iint_S x^2y^2\,dx\,dy \quad \text{gdje je sad } S: \{x^2+y^2=R^2$$

Uvodimo polarne koordinate $\begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{matrix} \Rightarrow S': \begin{cases} 0\le r\le R \\ 0\le\varphi\le 2\pi \end{cases}$

$dx\,dy = r\,dr\,d\varphi$

$$C = -3\iint_{S'} r^2\cos^2\varphi\, r^2\sin^2\varphi\cdot r\,dr\,d\varphi = -3\int_0^R r^5\left[\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\cdot\underbrace{4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}_{(\sin 2\varphi)^2}\,d\varphi\right]dr$$

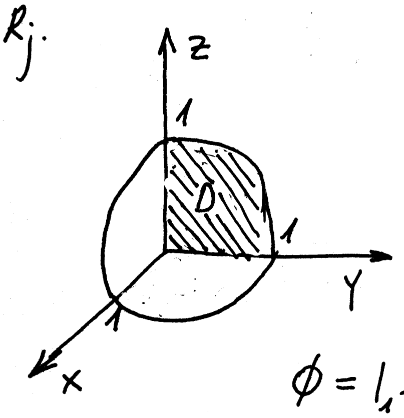
$$= -3\int_0^R r^5\left[\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\sin^2 2\varphi\,d\varphi\right]dr = -\frac{3}{4}\int_0^R r^5\left[\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4\varphi}{2}\,d\varphi\right]dr$$

$$= -\frac{\cancel{3}^{\,1}}{4}\left[\frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{4}\sin 4\varphi\Big|_0^{2\pi}\right]\cdot\frac{1}{\cancel{6}_{\,2}}r^6\Big|_0^R = -\frac{1}{8}R^6\cdot\pi$$

$$\boxed{\begin{matrix} 1 = \cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi \\ \cos 4\varphi = \cos^2 2\varphi - \sin^2 2\varphi \end{matrix}}$$

Naći fluks polja $\vec{v} = xy\,\vec{i} + yz\,\vec{j} + zx\,\vec{k}$ kroz dio sfere $x^2+y^2+z^2=1$ u I oktantu.

Rj.



I način

$$\Phi = \iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_S (V_x\cos\alpha + V_y\cos\beta + V_z\cos\gamma)\,dS$$

$$= \iint_S V_x\,dy\,dz + V_y\,dx\,dz + V_z\,dx\,dy$$

$$\Phi = I_1 + I_2 + I_3 = \iint_S xy\,dy\,dz + \iint_S yz\,dx\,dz + \iint_S zx\,dx\,dy$$

Zbog simetrije $I_1 = I_2 = I_3$ pa je $\Phi = 3I_1$. Računamo samo I_1

$$I_1 = \iint_S xy\,dy\,dz = +\iint_D \sqrt{1-(y^2+z^2)}\;y\,dy\,dz \quad \text{gdje je } D: y^2+z^2 \le 1,\ x\ge 0,\ y \ge 0$$

$$x^2 = 1-(y^2+z^2)$$
$$x = \pm\sqrt{1-(y^2+z^2)}$$

uzimamo + jer smo u prvom oktantu

Vektor normale zaklapa ugao $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ sa x-osom. $\cos\alpha > 0$ (u I oktantu).

Uvodimo polarne koordinate $y = r\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$

$$D': \begin{cases} 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 1 \\ dy\,dz = r\,d\varphi\,dr \end{cases} \qquad y^2+z^2 = r^2$$

$$I_1 = \iint_{D'} r\cos\varphi\sqrt{1-r^2}\cdot r\,d\varphi\,dr = \int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi\right]dr = \int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\cdot 1\,dr$$

$$= \left|\begin{matrix} r = \sin t \\ dr = \cos t\,dt \end{matrix}\right| = \int_0^1 \sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt = \int_0^1 \sin^2 t\cos^2 t\,dt = \ldots = \frac{3\pi}{16}$$

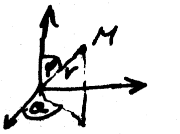
u prethodnom zadatku smo imali slično

II način: Kako je S zatvorena površ možemo primjeniti formulu Gauss-Ostrogradski.

$$\Phi = \iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{v}\,dx\,dy\,dz = \iiint_\Omega\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

U našem slučaju $\Phi = \iiint_\Omega (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$ gdje je $\Omega: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le 1 \\ x\ge 0,\ y\ge 0 \\ z \ge 0 \end{cases}$

Uvodimo sferne koordinate



$$x = r\sin\varphi\cos\theta$$
$$y = r\sin\varphi\sin\theta$$
$$z = r\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \Omega': \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le \pi/2 \\ 0 \le \theta \le \pi/2 \end{cases} \qquad dx\,dy\,dz = r^2\sin\varphi\,d\varphi\,dr\,d\theta$$

$$\Phi = \iiint_{\Omega'} (r\sin\varphi\cos\theta + \ldots)\,r^2\sin\varphi\ldots = \ldots = \frac{3\pi}{16}$$

Izračunati cirkulaciju vektorskog polja $\vec{v}=(1, xy^2, yz^2)$ duž konture $x^2+2y^2=4$, $z=2x$.

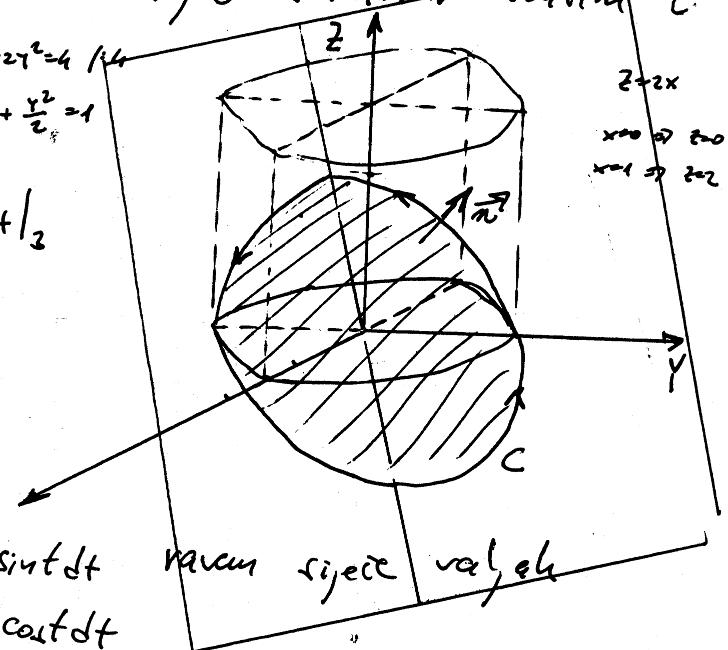
R.: Cirkulacija vektorskog polja $\vec{v}$ $(\vec{v}=(v_x, v_y, v_z))$ duž krive c je integral

$$C=\int_c \vec{v}\, d\vec{r}=\int_c v_x\,dx+v_y\,dy+v_z\,dz$$

Pokušajmo skicirati konturu c.

$x^2+2y^2=4$ /:4

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$



$z=2x$

$x=0 \Rightarrow z=0$

$x=1 \Rightarrow z=2$

U našem slučaju

$$C=\int_c dx+xy^2\,dy+yz^2\,dz=I_1+I_2+I_3$$

parametriziramo konturu c

kako je $\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2=1$ uvedimo smjene

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x}{2}=\cos t\\ \frac{y}{\sqrt{2}}=\sin t\\ z=z\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}x=2\cos t\\ y=\sqrt{2}\sin t\\ z=4\cos t\\ 0\le t\le 2\pi\end{array} \qquad \begin{array}{l}dx=-2\sin t\,dt\\ dy=\sqrt{2}\cos t\,dt\\ dz=-4\sin t\,dt\end{array}$$

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$

$2\sin^2 x=1-\cos 2x$

$2\cos^2 x=1+\cos 2x$

$$C=\int_0^{2\pi}\left(-2\sin t+2\cos t\cdot 2\sin^2 t\cdot\sqrt{2}\cos t+\sqrt{2}\sin t\cdot 16\cdot\cos^2 t(-4\sin t)\right)dt$$

pojednostavimo računanje ovog integrala

$$I_1=\int_c dx=\int_0^{2\pi}-2\sin t\,dt=2\cos t\Big|_0^{2\pi}=2(1-1)=0$$

$4\cos^2 t\sin^2 t=(2\cos t\sin t)^2$

$$I_2=\int_c xy^2\,dy=\int_0^{2\pi}2\cos t\cdot 2\sin^2 t\cdot\sqrt{2}\cos t\,dt=4\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t\,dt=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\,dt$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)\,dt=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(t\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{2}\sin t\Big|_0^{2\pi}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(2\pi-0)=\pi\sqrt{2}$$

$$I_3=\int_c yz^2\,dz=\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\sin t\cdot 16\cos^2 t\cdot(-4)\sin t\,dt=\overbrace{-64}^{(-16)\cdot 4}\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t=-16\,I_2=-16\pi\sqrt{2}$$

$$C=\pi\sqrt{2}-16\pi\sqrt{2}=-15\pi\sqrt{2}$$

II način

pomoću Stoksove formule

povrčinski integral

$$C=\int_C \vec{v}\,d\vec{r}=\iint_S \vec{n}\,\mathrm{rot}\,\vec{v}\,dS=\iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} dS$$

gdje je S površina koju zatvara kontura C, $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ jedinični vektor normale na S

$$\mathrm{rot}\,\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 1 & xy^2 & yz^2 \end{vmatrix}=(z^2-0)\vec{i}-(0-0)\vec{j}+(y^2-0)\vec{k}=(z^2,0,y^2)$$

$$C=\iint_S (z^2\cos\alpha+y^2\cos\gamma)\,dS$$

posmatramo ravan $z=2x$ i vektor normale na ovu ravan, zato što je naša elipsa unutar ove ravni:

$2x-z=0 \quad \vec{n}=(2,0,-1)$

$|\vec{n}|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5} \quad \vec{n}_0=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},0,-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

projekcija površi S na xOy ravan je elipsa $x^2+2y^2=4$

prema tome

$$C=\iint_S (z^2\cos\alpha+y^2\cos\gamma)\,dS=\iint_{D'} z^2\,dy\,dz-\iint_{D''} y^2\,dx\,dy$$

$x^2+2y^2=4$
$z=2x$

$\left(\frac{z}{2}\right)^2+2y^2=4 \quad /\cdot 4$

$z^2+8y^2=16 \quad /:16$

$\frac{z^2}{16}+\frac{y^2}{2}=1$

Projekcija površi S na yOz ravan je elipsa $D':\left\{\frac{z^2}{16}+\frac{y^2}{2}=1\right.$

$$\iint_{D'} z^2\,dy\,dz=\left|\begin{matrix} \frac{z}{4}=r\cos\varphi & z=4r\cos\varphi & dy\,dz=4\sqrt{2}\,r\,dr\,d\varphi \\ \frac{y}{\sqrt{2}}=r\sin\varphi & y=\sqrt{2}\,r\sin\varphi & \\ & 0\le\varphi\le 2\pi & \\ & 0\le r\le 1 & \end{matrix}\right|=\iint_{D_1'} 16r^2\cos^2\varphi\, 4\sqrt{2}\,r\,dr\,d\varphi=$$

$$=64\sqrt{2}\int_0^1 r^3\,dr\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi=64\sqrt{2}\int_0^1 r^3\,dr\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi=32\sqrt{2}\cdot\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^1\left(2\pi-\left.\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right|_0^{2\pi}\right)=$$
$$=16\sqrt{2}\,\pi$$

Projekcija površi S na xOy ravan je elipsa $D'':\left\{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\right.$

$$\iint_{D''} y^2\,dx\,dy=\left|\begin{matrix} \frac{x}{2}=r\cos\varphi & x=2r\cos\varphi & dx\,dy=2\sqrt{2}\,r\,dr\,d\varphi \\ \frac{y}{\sqrt{2}}=r\sin\varphi & y=\sqrt{2}\,r\sin\varphi & 0\le\varphi\le 2\pi \\ & & 0\le r\le 1 \end{matrix}\right|=\int_0^1\int_0^{2\pi} 2r^2\sin^2\varphi\cdot 2\sqrt{2}\,r\,dr\,d\varphi=$$

$$=4\sqrt{2}\int_0^1 r^3\,dr\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi=\ldots=\pi\sqrt{2}$$

$$C=16\pi\sqrt{2}-\pi\sqrt{2}=15\pi\sqrt{2}$$

(#) Izračunati cirkulaciju vektorskog polja $\vec{v}=(e^{y-z}, e^{z-x}, e^{x-y})$ duž odsječka prave od tačke $O(0,0,0)$ do tačke $T(1,3,5)$.

Rj. Cirkulacija vektorskog polja $\vec{v}$ duž krive c je integral

$$C=\int_c \vec{v}\, d\vec{r} = \int_c v_x\, dx + v_y\, dy + v_z\, dz$$ gdje je $\vec{r}=(x,y,z)$

$d\vec{r}=(dx, dy, dz)$.

$O(0,0,0)$
$T(1,3,5)$

Jednačina prave kroz tačku OT je

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5} \; (=t)$$

$\overline{OT}: \begin{cases} x=t \\ y=3t \\ z=5t \\ 0\le t\le 1 \end{cases}$ u parametarskom obliku

$$\int_c e^{y-z}dx+e^{z-x}dy+e^{x-y}dz = \left| \begin{matrix} x=t, & dx=dt & y-z=-2t \\ y=3t, & dy=3dt & z-x=4t \\ z=5t, & dz=5dt & x-y=-2t \end{matrix} \right| =$$

$$=\int_0^1 \left(e^{-2t}+e^{4t}\cdot 3+e^{-2t}\cdot 5\right)dt = \int_0^1 \left(6e^{-2t}+3e^{4t}\right)dt$$

$$= \left| \begin{matrix} d(-2t)=-2\,dt \\ dt=-\frac{1}{2}d(-2t) \\ d(4t)=4\,dt \\ dt=\frac{1}{4}d(4t) \end{matrix} \right| = 6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^1 e^{-2t}d(-2t)+3\cdot\frac{1}{4}\int_0^1 e^{4t}d(4t)=$$

$$=-3e^{-2t}\Big|_0^1+\frac{3}{4}e^{4t}\Big|_0^1 = -3\left(e^{-2}-1\right)+\frac{3}{4}\left(e^{4}-1\right)$$

$$=(-3)e^{-2}+\frac{3}{4}e^{4}+3-\frac{3}{4}=(-3)e^{-2}+\frac{3}{4}e^{4}+\frac{9}{4}$$ traženo rješenje

Zadaci za vježbu

Protok (fluks) i cirkulacija (u ravni)

4450. Izračunati protok i cirkulaciju konstantnog vektora A duž proizvoljne zatvorene krive L.

4451. Izračunati protok i cirkulaciju vektora $A(P) = a\mathbf{r}$, pri čemu je a — konstantan skalar, a $\mathbf{r}$ — vektor položaja tačke P, — duž proizvoljne zatvorene krive L.

4452. Izračunati protok i cirkulaciju vektora $A(P) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ duž proizvoljne zatvorene krive L.

4453. Izračunati protok i cirkulaciju vektora $A(P) = (x^3 - y)\mathbf{i} + (y^3 + x)\mathbf{j}$ duž kružnice poluprečnika R sa centrom u koordinatnom početku.

4454. Potencijal polja brzinâ čestica tečnosti je $u = \ln r \; (r = \sqrt{x^2 + y^2})$; odrediti količinu tečnosti koja ističe u jedinici vremena kroz zatvorenu konturu opisanu oko kordinatnog početka (protok), i količinu tečnosti koja protiče u jedinici vremena duž te konture (cirkulacija). Koliki će biti rezultat ako centar leži van konture?

4455. Potencijal polja brzinâ čestica tečnosti je $u = \varphi$, pri čemu je $\varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$; odrediti protok i cirkulaciju vektora brzina duž zatvorene konture L.

4456. Potencijal polja brzinâ čestica tečnosti je $u(x, y) = x(x^2 - 3y^2)$; izračunati količinu tečnosti koja protekne u jedinici vremena kroz pravolinijski odsečak koji spaja koordinatni početak sa tačkom $(1,1)$.

Rješenja

4450. I protok i cirkulacija su jednaki nuli.

4451. Vrednost protoka je $2aS$, gde je S površina oblasti ograničene konturom L cirkulacija je jednaka nuli.

4452. I protok i cirkulacija su jednaki nuli.

4453. Vrednost protoka je $\dfrac{2}{3}\pi R^4$, a cirkulacija je $2\pi R^2$.

4454. U slučaju kad koordinatni početak leži unutar konture protok ima vrednost 2π, protivnom slučaju njegova je vrednost nula; cirkulacija je u oba slučaja jednaka nuli.

4455. Ako koordinatni početak leži unutar konture cirkulacija je 2π, a ako leži van onture vrednost cirkulacije je 0; protok je u oba slučaja jednak nuli.

Zadaci za vježbu

Protok i cirkulacija (u prostoru)

4457. Dokazati da je početak vektora položaja $\boldsymbol{r}$ kroz svaku zatvorenu površinu jednak trostrukoj zapremini tela ograničenog tom površinom.

4458. Izračunati protok vektora položaja kroz bočnu površinu kružnog cilindra (poluprečnik osnove je R, visina H), ako osa cilindra prolazi kroz koordinatni početak.

4459. Koristeći rezultate zadataka 4457 i 4458 utvrditi koliki je protok vektora položaja kroz obe osnove cilindra prethodnog zadatka.

4460. Izračunati protok vektora položaja kroz bočnu površinu kružnog konusa čija osnova leži u ravni xOy, a osa mu se poklapa sa z-osom. (Visina konusa je $=1$, a poluprečnik osnove je $=2$).

4461. Naći protok vektora $A(P)=xy\,\boldsymbol{i}+yz\,\boldsymbol{j}+xz\,\boldsymbol{k}$ kroz onaj deo površine sfere $x^2+y^2+z^2=1$ koji leži u prvom oktantu.

4462*. Naći protok vektora $A(P)=yz\,\boldsymbol{i}+xz\,\boldsymbol{j}+xy\,\boldsymbol{k}$ kroz bočnu površinu piramide sa vrhom u tački $S(0, 0, 2)$, čija je osnova trougao sa temenima $0(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 0)$ i $B(0, 1, 0)$.

4463. Izračunati cirkulaciju vektora položaja jednog zavoja AB zavojnice $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$, ako su A i B tačke koje odgovaraju vrednostima 0 i 2π parametra t.

4464. Kruto telo se obrće konstantnom ugaonom brzinom ω oko z-ose; izračunati cirkulaciju polja linearnih brzina duž kružne linije poluprečnika R, čiji centar leži na osi obrtanja a ravan joj je normalna na tu osu, — u smeru u kom se vrši obrtanje.

4465*. Izračunati protok rotora vektorskog polja $A(P)=y\,\boldsymbol{i}+z\,\boldsymbol{j}+x\,\boldsymbol{k}$ kroz površinu obrtnog paraboloida $z=2(1-x^2-y^2)$ koju od njega odseca ravan $z=0$

Rješenja

4456. 2. **4458.** $2\pi R^2H$. **4459.** πR^2H.

4460. 4π. Izračunati protok kroz osnovu konusa i iskoristiti rezultat zadatka 4457.

4461 $\dfrac{3\pi}{16}$.

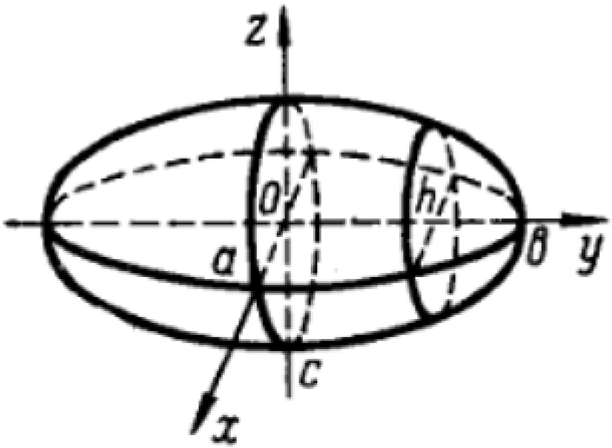
4462*. $\dfrac{1}{6}$. Primeniti formulu Ostrogradskog i izračunati protok kroz osnovu piramide

4463. $2\pi^2b^2$. **4464.** $2\pi\omega R^2$.

4465. $-\pi$. Primeniti Škotsovu formulu uzimajući za konturu L krivu po kojoj ravan Oxy preseca paraboloid.

1. Naći protok (fluks) vektorskog polja $\vec{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{x}\vec{\boldsymbol{i}} - \boldsymbol{y}^2\vec{\boldsymbol{j}} + \left(\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 - 1\right)\vec{\boldsymbol{k}}$ kroz elipsoidu $\frac{\boldsymbol{x}^2}{\boldsymbol{a}^2} + \frac{\boldsymbol{y}^2}{\boldsymbol{b}^2} + \frac{\boldsymbol{z}^2}{\boldsymbol{c}^2} = 1$.

Rješenje:



Slika 1: elipsoid

Kako je S zatvorena površ možemo primijeniti formulu Gauss - Ostrogradski

$$\Phi = \iint_S \vec{p}\vec{n}\, ds = \iiint_\Omega div\, \vec{p}\, dxdydz = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dxdydz$$

Imamo:

$$\vec{p} = \left(v_x, v_y, v_z\right) = \left(x, -y^2, x^2 + y^2 - 1\right)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial v_y}{\partial y} = -2y,\ \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Oblast Ω je ograničena elipsoidom (vidi sliku 1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

$$\Phi = \iiint_\Omega \left(1 - 2y\right) dxdydz = (*)$$

Uvedimo sferne koordinate:

$$x = ra\, sin\varphi\, cos\theta$$
$$y = rb\, sin\varphi\, sin\theta$$
$$z = rc\, cos\varphi$$
$$dx\,dy\,dz = r^2 sin\varphi abc\, dr\, d\varphi\, d\theta$$
$$\Omega' = \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

$$(*) = \iiint\limits_{\Omega'} (1 - 2\mathrm{rb}\ \sin\varphi\ \sin\theta)\ \mathrm{r}^2 \sin\varphi \mathrm{abc}\ \mathrm{dr}\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}\theta$$

$$= \mathrm{abc}\int_0^1 \mathrm{r}^2\ \mathrm{dr}\int_0^\pi \sin\varphi\ \mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\left(1 - 2\mathrm{rb}\ \sin\varphi\ \sin\theta\right)\ \mathrm{d}\theta$$

$$= \mathrm{abc}\int_0^1 \mathrm{r}^2\ \mathrm{dr}\int_0^\pi (2\pi - 2\mathrm{rb}\ \sin\varphi(-\cos 2\pi + \cos 0)\sin\varphi\ \mathrm{d}\varphi$$

$$= \mathrm{abc}\int_0^1 \mathrm{r}^2\ \mathrm{dr}\int_0^\pi (2\pi - 2\mathrm{rb}\ \sin\varphi\left(-1 + 1\right))\sin\varphi\ \mathrm{d}\varphi$$

$$= \mathrm{abc}\int_0^1 \mathrm{r}^2\ \mathrm{dr}\int_0^\pi 2\pi\ \sin\varphi\ \mathrm{d}\varphi$$

$$= 2\pi\mathrm{abc}\int_0^1 \mathrm{r}^2\ \mathrm{dr}\int_0^\pi \sin\varphi\ \mathrm{d}\varphi$$

$$= 2\pi\mathrm{abc}\int_0^1 (-\cos\pi + \cos 0)\mathrm{r}^2\ \mathrm{dr}$$

$$= 2\pi\mathrm{abc}\int_0^1 (-(-1) + 1)\mathrm{r}^2\ \mathrm{dr}$$

$$= 4\pi\mathrm{abc}\int_0^1 \mathrm{r}^2\ \mathrm{dr}$$

$$= 4\pi\mathrm{abc}\frac{1}{3}(1 - 0) = \frac{4}{3}\boldsymbol{\pi}\mathbf{abc}$$

Prema tome

$$\boldsymbol{\Phi} = \frac{4}{3}\boldsymbol{\pi abc}\,.$$

(Zadaci su skinuti sa stranice: \pf.unze.ba\nabokov
Za uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)